DOI:10.16468/j.cnki.issn1004-0366.2010.03.005
第22卷 第3期 甘肃科学学报 Vol.22 No.3
2010年9月 Journal of Gansu Sciences Sep.2010

Smarandache函数的均值分布性质

李 超,杨存典,刘端森
(商洛学院 数学与计算科学系,陕西 商洛 726000)

摘 要: 对于任意给定的正整数 n,著名的Smarandache函数 $S(n)$ 定义为 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$.利用初等方法与解析方法研究函数 $S(n)$ 的有关性质,并给出了一些有趣的渐近公式.

关键词: Smarandache函数;Smarandache可乘函数;渐近公式
中图分类号: O 156.4 文献标志码: A 文章编号:1004-0024-04

On the Average Value Distribution of the Smarandache Function

LI Chao, YANG Cun-dian, LIU Duan-sen
(Department of Mathematics and Computer Science, Shangluo College, Shangluo 726000, China)

Abstract: Given a positive integer n, the definition of the famous Smarandache function is: $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$. Our aim is to study the properties of the Smarandache function by the elementary method and some interesting asymptotic formulas are also given.

Key words: Smarandache function; Smarandache-multiplicative function; asymptotic

1 预备知识

对于任意一个正整数 n, 著名的F.Smarandache函数 $S(n)$ 定义为最小的正整数 m, 使得 $n\mid m!$, 即 $S(n)=\min\{m: m\in N, n\mid m!\}$. 从 $S(n)$ 的定义人们容易推出如果 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_r^{\alpha_r}$ 表示 n 的标准分解式,那么 $S(n)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{S(p_i^{\alpha_i})\}$. 由此,不难计算出 $S(1)=1, S(2)=2, S(3)=3, S(4)=4, S(5)=5, S(6)=3, S(7)=7, S(8)=4, S(9)=6, S(10)=5, S(11)=11, S(12)=4, S(13)=13, S(14)=7, S(15)=5, S(16)=6, \cdots$. 关于 $S(n)$ 的性质,许多学者进行了研究,获得了不少有趣的结果[1~9]. 如Yu Yaming研究了一类包含 $S(n)$ 方程的可解性[3],证明了该方程有无穷多组正整数解,即证明了对任意正整数 $k\geqslant 2$, 方程

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)=S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k)$$

有无穷多组正整数解 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$.

文献[3]进一步证明了对任意正整数 $k\geqslant 2$, 存在无穷多组正整数解 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$, 满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)>S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k).$$

同时,又存在无穷多组正整数解 $(m_1, m_2, \cdots, m_k)$, 满足不等式

$$S(m_1+m_2+\cdots+m_k)<S(m_1)+S(m_2)+\cdots+S(m_k).$$

此外,徐哲峰获得了有关 $S(n)$ 的一个结果[5],即证明了渐近公式

收稿日期:2010-03-30
基金项目:国家自然科学基金项目(10671155);商洛学院科研基金项目(07sky16);商洛学院科研基金项目(08sky011)

$$\sum_{n\leqslant x}(S(n)-p(n))^2=\frac{2\zeta\left(\frac{3}{2}\right)x^{\frac{3}{2}}}{3\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\ln^2 x}\right).$$

其中 $p(n)$ 表示 n 的最大素因子，$\zeta(s)$ 表示 Riemann Zeta-函数.

令 m 也是一个正整数，如果一个算术函数 $f(n)$ 满足 $f(mn)=\max\{f(m),f(n)\}$，这里 $(m,n)=1$，我们便称 $f(n)$ 为 Smarandache 可乘函数. 显然 Smarandache 可乘函数不是可乘函数. 因为当 p、q 为不同素数时，$f(p^\alpha q^\beta)\neq f(p^\alpha)f(q^\beta)$. 由定义看出 $S(n)$ 和 $p(n)$ 均为 Smarandache 可乘函数.

2　主要结论及证明

我们的主要目的就是研究函数 $\frac{S(n)}{p(n)}$ 和 $\frac{p(n)}{S(n)}$ 的均值，并得到几个有趣的渐近公式，即证明以下结论：

定理　对任意实数 $x\geqslant 2$，有近似公式

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{p(n)}=x\ln 2+\frac{6x^{\frac{2}{3}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\ln^2 x}\right),$$

为了完成定理的证明，需要以下引理.

引理 1　对于任意正整数 n

(ⅰ) 如果 $p(n)>\sqrt{n}$，则 $S(n)=p(n)$；

(ⅱ) 如果 $n=mp_1p(n)$，且 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<p(n)<\sqrt{n}$，则 $S(n)=p(n)$；

(ⅲ) 如果 $n=mp^2(n)$，且 $n^{\frac{1}{3}}<p(n)<\sqrt{n}$，则 $S(n)=2p(n)$.

其中 $p(n)$ 表示 n 的最大素因子函数.

引理 2　设 p 是一个素数，对任意实数 $x\geqslant 2$，有近似公式

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\ln\ln x+d+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

证明　用 $\pi(x)$ 表示不大于 x 的素数的个数，根据文献[6] 知

$$\pi(x)=\frac{x}{\ln x}+O\left(\frac{x}{\ln^2 x}\right),$$

利用 abel′s 求和公式得

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}=\pi(x)\times\frac{1}{x}+\int_2^x\pi(t)\times\frac{1}{t^2}dt=\frac{1}{\ln x}+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)+\int_2^x\left(\frac{1}{t\ln t}+O\left(\frac{1}{t\ln^2 t}\right)\right)dt=$$
$$\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x+d+O\left(\frac{1}{\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{1}{\ln x}\right)=\ln\ln x+d+O\left(\frac{1}{\ln x}\right).$$

引理 3　设 p 是一个素数，对任意实数 $x\geqslant 2$，有近似公式[5]

$$\sum_{m\leqslant p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}p^2=\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3m^{\frac{3}{2}}(\ln x-\ln m)}+O\left(\frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{3}{2}}\ln^2 x}\right).$$

引理 4　对任意实数 $x\geqslant 2$，有如下估计

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}\frac{S(n)}{p(n)}\ll x\ln x.$$

证明　令 $n=\prod_{i=1}^{r}p_i^{\alpha_i}$，则有 $S(n)=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{S(p_i^{\alpha_i})\}\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha p_i\}$. 令 $\alpha p=\max_{1\leqslant i\leqslant r}\{\alpha p_i\}$，则 $S(n)\ll p\ln n$.

注意到，如果 $\alpha=1$，那么 $p=p(n)$，故 $\frac{S(n)}{p(n)}=1$，有

$$\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}}}\frac{S(n)}{p(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}\\ \alpha=1}}\frac{S(n)}{p(n)}+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}}\\ \alpha\geqslant 2}}\frac{S(n)}{p(n)}\ll\sum_{m\leqslant\sqrt{x}}\sum_{p\leqslant\frac{x}{m}}1+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant n^{\frac{1}{3}},\ p^2|n}}p\ln n\ll 2x\ln 2+x\ln x\ln\frac{1}{3}\ll x\ln x.$$

给出定理的证明，首先从引理知

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{p(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)>\sqrt{n}}}\frac{S(n)}{p(n)}+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant\sqrt{n}}}\frac{S(n)}{p(n)}=\sum_{\substack{n\leqslant\sqrt{x}\\ n<p\leqslant\frac{x}{n}}}1+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ p(n)\leqslant x^{\frac{1}{3}}}}\frac{S(n)}{p(n)}+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<p(n)\leqslant\sqrt{n}}}\frac{S(n)}{p(n)}=$$

$$O(x\ln x)+O(x^{\frac{4}{3}}\ln x)+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<p(n)\leqslant\sqrt{n}}}\frac{S(n)}{p(n)},$$

当 $n^{\frac{1}{3}}<p(n)<\sqrt{n}$ 时，n 只有以下几种情况：

(1) $n=mp^2(n)$；

(2) $n=mp_1p(n)$，其中 $n^{\frac{1}{3}}<p_1<p(n)$；

(3) $n=mp(n)$，且 $p(m)\leqslant n^{\frac{1}{3}}$.

对于第(3)种情况，按照引理4可以估计，所以有

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{p(n)}=O(x\ln x)+O(x^{\frac{4}{3}}\ln x)+\sum_{\substack{n\leqslant x\\ n^{\frac{1}{3}}<p(n)\leqslant\sqrt{n}}}\frac{S(n)}{p(n)}=$$

$$\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{mp^2}}}2+\sum_{\substack{mp_1p\leqslant x\\ (mp_1p)^{\frac{1}{3}}<p_1<p\leqslant\sqrt{mp_1p}}}1+O(x^{\frac{4}{3}}\ln x),\tag{1}$$

因为

$$\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{mp^2}}}2=\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}2=2\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{x^{\frac{1}{3}}\leqslant p\leqslant\sqrt{\frac{x}{m}}}1+O\Big(\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\sum_{m<p<x^{\frac{1}{3}}}1\Big)=$$

$$2\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\left(\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln\sqrt{\frac{x}{m}}}-\frac{3x^{\frac{1}{3}}}{\ln x}+O\left(\frac{\sqrt{\frac{x}{m}}}{\ln^2\sqrt{\frac{x}{m}}}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\ln x}\right)\right)=$$

$$4x^{\frac{1}{2}}\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}(\ln x-\ln m)}-\frac{6x^{\frac{2}{3}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\ln x}\right),\tag{2}$$

$$\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}(\ln x-\ln m)}=\frac{1}{\ln x}\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\ln m}{\ln x}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\ln^{k+1}x}\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{\ln^k m}{m^{\frac{1}{2}}},$$

$$\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{\ln^k m}{m^{\frac{1}{2}}}=\frac{x^{\frac{1}{6}}\ln^k x}{3^k}-\int_1^{x^{\frac{1}{3}}}t\times\frac{(k\ln^{k-1}t)\times\frac{1}{t}\times t^{\frac{1}{2}}-\ln^k t\times\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}}{t}\mathrm{d}t=\frac{2x^{\frac{1}{6}}\ln^k x}{3^k}-\frac{4kx^{\frac{1}{6}}\ln^{k-1}x}{3^{k-1}}+O(x^{\frac{1}{6}}\ln^{k-2}x),$$

$$\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}(\ln x-\ln m)}=\frac{1}{\ln x}\sum_{m\leqslant x^{\frac{1}{3}}}\frac{1}{m^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{\ln m}{\ln x}\right)}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2x^{\frac{1}{6}}}{3^k\ln x}-\frac{4kx^{\frac{1}{6}}}{3^{k-1}\ln^2 x}\right)+O\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\ln^3 x}\right)=$$

$$\frac{3x^{\frac{1}{6}}}{\ln x}-\frac{9x^{\frac{1}{6}}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\ln^3 x}\right).\tag{3}$$

由式(2)和式(3)得

$$\sum_{\substack{mp^2\leqslant x\\ (mp^2)^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\sqrt{mp^2}}}2=\frac{6x^{\frac{2}{3}}}{\ln x}-\frac{36x^{\frac{2}{3}}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\ln^3 x}\right),\tag{4}$$

同理

$$\sum_{\substack{mp_1p\leqslant x\\ (mp_1p)^{\frac{1}{3}}<p_1<p\leqslant\sqrt{mp_1p}}}1=\sum_{mp_1\leqslant\sqrt{x}}\sum_{x^{\frac{1}{3}}<p\leqslant\frac{x}{mp_1}}1=\sum_{mp_1\leqslant\sqrt{x}}\left(\pi\left(\frac{x}{mp_1}\right)-\pi(x^{\frac{1}{3}})\right)=x\ln 2+O\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\ln x}\right),\tag{5}$$

结合式(1)、式(4)和式(5)得

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{S(n)}{p(n)}=\frac{6x^{\frac{2}{3}}}{\ln x}-\frac{36x^{\frac{2}{3}}}{\ln^2 x}+O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\ln^3 x}\right)+x\ln 2+O\left(\frac{x^{\frac{1}{6}}}{\ln x}\right)+O(x\ln x)=x\ln 2+\frac{6x^{\frac{2}{3}}}{\ln x}+O\left(\frac{x^{\frac{2}{3}}}{\ln^2 x}\right).$$

定理得证.

参考文献:

[1] Smarandache F. Only Proplem, Not Solution[M]. Chicago: Xiquan Publishing House, 1993.

[2] Wang Yongxing. On the Smarandache Function[J]. Reserch on Smarandache Problem in Number Theory, 2005, 2: 103-106.

[3] Lu Yaming. On the Solution of an Equation Involving the Smarandache Function[J]. Scientia Magna, 2006, 2(1): 76-79.

[4] Sandor J. On a Dual of the Pseudo-Smarandache Function[J]. Smarandache Notions, 2002, 13: 16-23.

[5] 徐哲峰. 关于 Smarandache 函数的值分布[J]. 数学学报(中文版), 2006, 49(5): 1 009-1 012.

[6] 张文鹏. 关于 F. Smarandache 函数的两个问题[J]. 西北大学学报, 2008, 38(2): 173-176.

[7] Pan Chengdong, Pan Chengbiao. The Elementary Number Theory[M]. Beijing: Beijing University Press, 2003.

[8] Yang Cundian, Liu Duansen. On the Mean Value of a New Arithmetical Function[J]. Research on Smarandache Problems in Number Theory, 2005, 2: 75-77.

[9] 杨存典, 李超, 刘端森. Smarandache 函数的几个性质[J]. 甘肃科学学报, 2010, 22(1): 24-25.

作者简介:

李　超(1965-)男, 陕西省镇安人, 现任商洛学院数学与计算科学系教授, 主要从事数论的教学与研究.

◦简　讯◦

窦新生院长政协提案受到高度重视

The Proposal about Strengthening Geologic Hazard Prevention in Entire Province

2010 年 7 月 12 日, 省政协副主席张世珍一行在甘肃地质灾害应急中心就加强地质灾害防治的重点提案召开了现场督办会。省科学院、省国土资源厅、省地矿局等有关领导参加了会议。

会议指出窦新生院长在省政协十届三次会议上专门就地质灾害防治工作提出的“关于加强全省城市地质灾害防治工作”的提案受到高度重视并已认真办理。省国土资源厅深入研究、周密部署, 在各市(州)已形成了一套以政府为主导, 社会参与, 预警监测, 群防群治的良好体系。省科学院在地质自然灾害防治研究方面有很强的专家队伍和很高的专业水平, 是我省地质自然灾害防治方面的一支重要的技术力量, 为我省地质自然灾害防治的研究、勘察、工程设计等方面做出了突出贡献。会议要求进一步建立与完善防治地质灾害的长效机制, 不断促进我省地质灾害防治工作迈上新的台阶。

(郝新民　供稿)